Školsko natjecanje iz fizike, šk. god. 2024./2025.
Srednja škola, 4. skupina

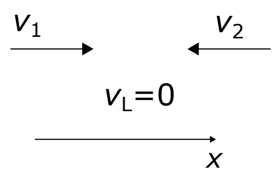
(17. 2. 2025.)

RJEŠENJA I SMJERNICE ZA BODOVANJE

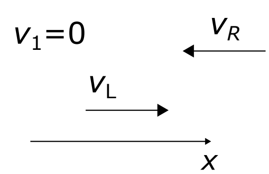
Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici zadatak riješe na drugačiji, a fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. a) Relativnu brzinu miona označimo s v_R. Trebamo voditi računa o tome da se brzine ovdje zbrajaju po specijalnoj, a ne Galileijevoj relativnosti. Usporedit ćemo laboratorijski sustav sa sustavom u kojem prvi mion miruje. Neka je iznos brzine laboratorija u potonjem sustavu jednak $v_L = 0.89\,c$. Koordinatni su sustavi orijentirani udesno, odnosno brzine su pozitivne ako su orijentirane udesno, a negativne ako su orijentirane ulijevo.

U laboratorijskom sustavu:



U sustavu prvog miona:



Primijetite da smo na drugoj skici brzinu laboratorija ucrtali ulijevo jer znamo da je to ispravan smjer kako bismo bili konzistentni s orijentacijom brzina na prvoj skici. Ako mion 1 putuje udesno s obzirom na laboratorij, tada laboratorij putuje ulijevo s obzirom na mion 1. S ovakvim orijentacijama brzina, za njih vrijedi sljedeće.

U sustavu prvog miona (**2 boda**):

$$v_1' = 0\,, \qquad v_2' = -v_R\,. \tag{1}$$

U laboratorijskom sustavu (**2 boda**):

$$v_1 = \frac{v_1' + v_L}{1 + v_1' v_L/c^2}\,, \qquad v_2 = \frac{v_2' + v_L}{1 + v_2' v_L/c^2}\,. \tag{2}$$

Uvrštavajući u posljednje izraze brzine dvaju miona u sustavu prvog miona, imamo dalje

$$v_1 = v_L\,, \qquad v_2 = \frac{-v_R + v_L}{1 - v_R v_L/c^2}\,. \tag{3}$$

Sjetimo se odredbe zadatka da su iznosi brzina dvaju miona međusobno jednaki u laboratorijskom sustavu. Očito su brzine međusobno suprotno orijentirane pa među njima postoji predznak "minus":

$$v_1 = -v_2\,. \tag{4}$$

Ubacivanjem jednadžbe (3) u jednadžbu (4) imamo

$$v_L = \frac{v_R - v_L}{1 - v_R v_L/c^2}\,, \tag{5}$$

što se sređivanjem lako svodi na (**1 bod**)

$$v_L^2 - \frac{2c^2}{v_R} v_L + c^2 = 0\,. \tag{6}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$v_{L,1} \approx 1.63\,c\,, \qquad v_{L,2} \approx 0.61\,c\,. \tag{7}$$

Prvo rješenje odbacujemo kao nefizikalno, budući da mora vrijediti $v_L \leq c$. Zaključujemo da su brzine dvaju miona (**2 boda**)

$$v_1 = -v_2 \approx 0.61\,c \approx 1.83 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,. \tag{8}$$

b) U laboratorijskom sustavu mion putuje brzinom koju smo netom našli, $v_1 \approx 0.61\,c$. Zbog dilatacije vremena prosječno vrijeme života mu je u ovom sustavu jednako (**1 bod**)

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}\,, \tag{9}$$

pri čemu je $\tau' = 2.2\,\mathrm{\mu s}$ vlastito vrijeme života. Prosječni prijeđeni put tada je jednostavno (**1 bod**)

$$L = v_1\tau = \frac{v_1\tau'}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}\,. \tag{10}$$

Uvrštavanjem v_1 i τ', imamo

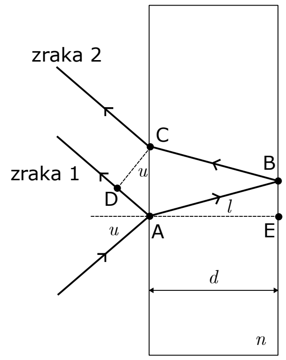
$$L \approx 508\,\mathrm{m}\,. \tag{11}$$

2. a) Duljina broda koju Mavis mjeri jest njegova vlastita duljina, budući da ona miruje s obzirom na brod. Ta je duljina, dakle, $L_0 = 300\,\mathrm{m}$. Možemo primijeniti formulu za kontrakciju duljine te zaključiti da je duljina broda u Stanleyjevu sustavu jednaka $L = 240\,\mathrm{m}$, pri čemu je $v = 0.6\,c$ brzina s obzirom na ciljnu ravninu, odnosno Stanleyja (**2 boda**). Međutim, to ne znači da bi Stanley rekao kako je u trenutku događaja 2 stražnji kraj broda na udaljenosti 240 m od ciljne ravnine. Problem je s tom logikom što za Stanleyja događaj 2 i prolazak kroz ciljnu ravninu (događaj 1) nisu istovremeni. Naime, od događaja 2 do događaja 1 Stanleyju će proći $\Delta t = 0.75\,\mathrm{\mu s}$. Brod će, pa tako i njegov prednji kraj, u tom vremenu prevaliti put od $\Delta x = v\Delta t = 135\,\mathrm{m}$ (**2 boda**). To znači da se u trenutku događaja 2 stražnji kraj nalazi na udaljenosti od $L + \Delta x = 375\,\mathrm{m}$ od ciljne ravnine (**2 boda**).

b) Stanley kaže kako se slanje poruke sa stražnjeg kraja dogodilo prije prolaska kroz ciljnu ravninu. Međutim, prolazak kroz ciljnu ravninu nije uzrok poruke poslane od strane odašiljača. Pravi je uzrok Mavisin uzvik, koji na neki način mora putovati s prednjeg na stražnji kraj broda, da bi ga odašiljač mogao proslijediti dalje. Najbrže što može putovati jest brzinom svjetlosti (**1 bod**). U Mavisinu sustavu mora prevaliti vlastitu duljinu broda, za što mu je u slučaju putovanja brzinom svjetlosti potrebno vrijeme od $\tau = c/L_0 = 1\,\mathrm{\mu s}$ (**2 boda**). Dakle, da bi događaji 1 i 2 iz Mavisine perspektive bili istovremeni, ona je morala uzviknuti najmanje 1 µs prije prolaska kroz cilj. To je vrijeme dulje od onoga koliko je, prema Stanleyju, poruka odaslana ranije u odnosu na prolazak kroz cilj. Dakle, uzrok je zbilja bio prije posljedice, bez obzira na referentni sustav (**1 bod**, za primjećivanje da je ovo vrijeme dulje i/ili da stoga kauzalnost nije narušena).

3. Radi lakšeg snalaženja, možemo označiti točke A, B, C, D i E kao na slici. Vrijedi $|AB| = |BC|$. Ako je indeks loma listića jednak n, sa slike je očito da je razlika u optičkim putevima zraka 1 i 2 jednaka (**2 boda**: 1 bod za množenje prvog dijela s indeksom loma te 1 bod za ispravno određivanje drugog dijela)

$$\Delta x = 2n|AB| - (|AD| + \lambda/2)\,. \tag{12}$$



Pritom $\lambda/2$ dolazi od toga što se zraka 1 reflektira na granici s optički gušćim sredstvom i gore može jednakovaljano pisati $\cdots - \lambda/2$. Tog pomaka nema u točki B, budući da je riječ o granici s optički rjeđim sredstvom.

Duljine $|AB|$ i $|AD|$ treba izraziti preko poznatih veličina. Iz pravokutnog trokuta ΔADC (**1 bod**):

$$\sin u = \frac{|AD|}{|AC|} \quad \Rightarrow \quad |AD| = |AC| \sin u\,. \tag{13}$$

Budući da je $|BE| = |AC|/2$, iz pravokutnog trokuta ΔABE imamo (**1 bod** + **1 bod**):

$$\tan l = \frac{|AD|}{2d} \quad \Rightarrow \quad |AC| = 2d \tan l\,, \tag{14}$$

$$\cos l = \frac{d}{|AB|} \quad \Rightarrow \quad |AB| = \frac{d}{\cos l}\,. \tag{15}$$

Supstitucijom jednadžbi (13), (14) i (15) u izraz (12), razlika optičkih puteva postaje

$$\Delta x = 2d\left(\frac{n}{\cos l} - \tan l \sin u\right) - \frac{\lambda}{2}\,. \tag{16}$$

Želimo se riješiti ovisnosti o lomljenom kutu, odnosno izraziti ga preko poznatih veličina. Snellov zakon loma kaže (**1 bod**)

$$\sin u = n \sin l \quad \Rightarrow \quad \sin l = \frac{\sin u}{n}\,. \tag{17}$$

Koristeći se trigonometrijskim identitetima $\sin^2 l + \cos^2 l = 1$ i $\tan l = \sin l / \cos l$, slijedi (**1 bod** + **1 bod**)

$$\cos l = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{n^2}}\,, \tag{18}$$

$$\tan l = \frac{\sin u}{\sqrt{n^2 - \sin^2 u}}\,. \tag{19}$$

Uvrštavanjem u izraz (12) i sređivanjem, konačno nalazimo (**1 bod**)

$$\Delta x = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 u} - \frac{\lambda}{2}\,. \tag{20}$$

b) Uvjet konstruktivne interferencije jest da je razlika optičkih puteva jednaka cjelobrojnom višekratniku valne duljine (**1 bod**):

$$\Delta x = m\lambda\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,. \tag{21}$$

Izjednačavanjem s izrazom (20) te uvrštavanjem zadanih veličina dobiva se $m_P \approx 53.5$ i $m_C \approx 38$. Dakle, crvena svjetlost doživljava gotovo savršenu konstruktivnu, a plava destruktivnu interferenciju, pa će se listić činiti crvenim (ukupno **2 boda** za izračun broja valnih duljina i zaključak).

4. Iz priložene skice očito je da je duljina sjene jednaka

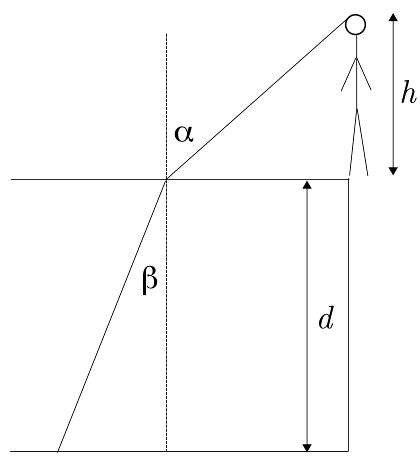
$$x = h \tan\alpha + d \tan\beta\,, \tag{22}$$

pri čemu je h dječakova visina, a d dubina bazena (**2 boda**). Iz činjenice da je svjetlost reflektirana od površine linearno polarizirana, znamo da upada pod Brewsterovim kutom, u kojem slučaju reflektirana i lomljena zraka zatvaraju pravi kut, $\alpha + \beta = \pi/2$ (**1 bod**). Snellov zakon loma kaže da je $n \sin\beta = \sin\alpha$ (**1 bod**), iz čega korištenjem identiteta $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$ te $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$ slijedi da je $\tan\alpha = n$ (**1 bod**) te $\tan\beta = \tan(\pi/2 - \alpha) = \cot\alpha = 1/n$ (**1 bod**). Iz toga odmah slijedi (**1 bod**) kako svjetlost koja dječaku upada u oči na površinu vode upada pod kutom

$$\alpha = \arctan n \approx 53^\circ\,. \tag{23}$$

Ubacivanjem u jednadžbu (22) i sređivanjem imamo (**1 bod**)

$$d = n(x - h) \approx 2\,\mathrm{m}\,. \tag{24}$$



5. a) Relativistički izraz za kinetičku energiju je (**1 bod**)

$$E_k^R = mc^2 \left(\frac{1}{1 - (v/c)^2} - 1 \right)\,, \tag{25}$$

dok je nerelativistički izraz jednak $E_k^{NR} = mv^2/2$. Po uvjetima zadatka, za traženu brzinu vrijedi

$$\frac{E_k^R}{E_k^{NR}} = r\,, \tag{26}$$

pri čemu je $r = 1.05$. Sređivanje ovog omjera (**3 boda**) vodi na jednadžbu trećeg reda za $x = (v/c)^2$,

$$r^2 x^3 + r(4 - r)x^2 + 4(1 - r)x = 0\,. \tag{27}$$

Razrada spomenutog sređivanja (svaka tri reda nose 1 bod):

$$
\begin{aligned}
&\frac{2c^2}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)=r \\
&x \equiv (v/c)^2 \\
&\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)=r \\
&\frac{2}{x}\,\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}=r \\
&rx\sqrt{1-x}=2-2\sqrt{1-x} \\
&(rx+2)\sqrt{1-x}=2 \quad /^2 \\
&(r^2x^2+4rx+4)(1-x)=4 \\
&r^2x^2+4rx+4-r^2x^3-4rx^2-4x=4 \\
&\text{konačno grupiranje vodi na izraz (27)}
\end{aligned} \tag{28}
$$

Vidimo da možemo izlučiti x, što vodi rješenju $x = 0$. To rješenje odbacujemo, budući da odgovara brzini $v = 0$, a mi po uvjetima zadatka tražimo konačnu brzinu (**1 bod**, dovoljno je i nalaženje rješenja, bez obzira na odbacivanje). Preostala dva rješenja dana su kvadratnom jednadžbom

$$(r/2)^2x^2 + r(1-r/4)x + (1-r) = 0\,. \tag{29}$$

Rješenja su $x_1 \approx -2.87$ i $x_2 \approx 0.06$. Prvo od ovih dvaju rješenja odbacujemo kao nefizikalno (odgovara $v > c$, **1 bod**), dok drugo vodi na $v \approx 0.24\,c$ (**1 bod**).

b) Izraz za relativističku količinu gibanja je (**1 bod**)

$$p_R = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,, \tag{30}$$

a za nerelativističku $p_{NR} = mv$, gdje su m i v masa i brzina objekta. Tražena relativna razlika stoga je jednaka (**1 bod**)

$$\delta r = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\,. \tag{31}$$

S druge strane, za satelit koji jednolikom brzinom kruži oko Marsa vrijedi jednakost gravitacijske i centripetalne sile (**1 bod**):

$$\frac{mv^2}{R_m} = \frac{GM_m m}{R_m^2}\,, \tag{32}$$

iz čega slijedi $v = \sqrt{GM_m/R_m}$. Ovdje smo iskoristili činjenicu da se nalazi blizu površine Marsa, dakle na udaljenosti približno jednakoj R_m od njegova centra mase. Ubacujući ovaj izraz za brzinu u (31), nalazimo da je (**1 bod**)

$$\delta r \approx 7 \times 10^{-11}\,. \tag{33}$$