

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak na drugačiji, a fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali. Najmanja jedinica bodova koja se dodjeljuje jest 1 bod.

Zadatak 1. (ukupno bodova: 12)

Na dnu zgrade u cijevi kružnog poprečnog presjeka u kojoj teče voda ukupan je tlak 300 kPa te je taj tlak jednak ukupnom tlaku u toj cijevi na vrhu zgrade. Ako se protok zaustavi, ukupni tlak na vrhu padne na 125 kPa, što je upola manje od tlaka na dnu u tom slučaju. Odredite:

(a) visinu zgrade

(b) brzinu kojom voda teče kroz cijev na dnu i na vrhu

(c) polumjer cijevi na dnu ako je na vrhu njezin polumjer 2 cm.

(d) Ako bismo s vrha zgrade iz te cijevi pustili vodu u horizontalnom smjeru istom brzinom kao i u pitanju pod (b), na kojoj bi udaljenosti od zgrade ona dotaknula tlo? Pretpostavite da se voda ponaša kao idealan fluid gustoće 1 kg/L, da nema grananja u cijevi, niti otpora zraka.

Rješenje:

(a) Promotrimo prvo slučaj kada voda ne teče. Tada je razlika tlakova Δp vrha i dna zgrade isključivo posljedica hidrostatskog tlaka, iz čega možemo izračunati visinu zgrade h_z (**1 bod za ovakav zaključak te 1 bod za ispravno izračunat h_z**)

$$125 \text{ kPa} = \Delta p = \rho g h_z \quad \Rightarrow \quad h_z = \frac{\Delta p}{\rho g} = 12.742 \text{ m},$$

pri čemu je ρ gustoća vode, a g ubrzanje sile teže blizu površine Zemlje.

(b) Kada voda ne teče, ukupni tlak na vrhu zgrade jednak je statičkom tlaku u sustavu, p_0 (koji, primjerice, može dolaziti od vodotornja na kojega je cijev spojena, a koji se nalazi na većoj visini), te je stoga $p_0 = 125 \text{ kPa}$ (**1 bod za uzimanje u obzir dodatnog člana u tlaku, p_0 , te 1 bod za ispravno izračunat p_0**).

Kada voda teče, potrebno je uzeti u obzir i dinamički tlak. Na dnu zgrade vrijedi (**1 bod za poznavanje izraza za ukupni tlak te 1 bod za ispravno izračunat v_{dno}**)

$$p_{\text{dno}} = \rho g h_z + p_0 + \frac{1}{2} \rho v_{\text{dno}}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{dno}} = 10.000 \text{ m/s},$$

dok na vrhu vrijedi (**1 bod za ispravno izračunat v_{vrh}**)

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_{\text{vrh}}^2 = p_{\text{vrh}} = p_{\text{dno}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{vrh}} = 18.708 \text{ m/s}.$$

(c) Kako bismo odredili polumjer cijevi na dnu, pozvat ćemo se na činjenicu da tok idealnog fluida mora biti konstanta te stoga vrijedi **(1 bod za ispravno napisanu jednadžbu kontinuiteta, tj. očuvanje toka, te 1 bod za ispravno izračunat polumjer r_{dno})**

$$v_{\text{dno}} r_{\text{dno}}^2 \pi = I_{\text{dno}} = I_{\text{vrh}} = v_{\text{vrh}} r_{\text{vrh}}^2 \pi \quad \Rightarrow \quad r_{\text{dno}} = r_{\text{vrh}} \sqrt{\frac{v_{\text{vrh}}}{v_{\text{dno}}}} = 2.736 \text{ cm}$$

(d) Voda koja izlazi iz cijevi čini horizontalni hitac, čiji je domet **(2 boda za ispravno napisanu ili izvedenu formulu za domet, ako učenici na fizikalno smislen način pokušaju izvesti tu formulu, ali naprave grešku u postupku, tada dodijeliti samo 1 bod)**

$$d = v_{\text{vrh}} \sqrt{\frac{2h_z}{g}},$$

uvrštavanjem dobivamo **(1 bod za točan rezultat)**

$$d = 30.153 \text{ m.}$$

Zadatak 2. (ukupno bodova: 10)

Ledena santa oblika uspravne prizme pluta u oceanu tako da je 11.2 % njene visine izvan vode.

(a) Odredite gustoću leda.

(b) Odredite visinu i površinu baze sante ako je poznato da, kada se na nju popne jedan tuljan mase 75 kg, gornja se stranica sante nalazi 30 cm iznad površine vode, a kada se na njoj nalaze dva tuljana, svaki mase 75 kg, cijela je santa taman potopljena.

Uzmite da je gustoća oceana 1.025 g/mL te da je santa uvijek uspravna.

Rješenje:

(a) Neka je visina sante iznad vode a_0 , a ispod b_0 , tada vrijedi $a_0 = 0.112(a_0 + b_0)$ (**1 bod za ispravno korištenje postotaka**). Izjednačavanje sila na tijelo daje (**1 bod za poznavanje Arhimedova zakona te 1 bod za sljedeću jednadžbu**)

$$\rho_V g b_0 A = (a_0 + b_0) \rho_L g A,$$

pri čemu je ρ_V gustoća oceana, ρ_L gustoća leda te A površina baze ledene sante. Sređivanjem slijedi (**1 bod za dobro izračunatu gustoću**)

$$\rho_L = \frac{b_0}{b_0 + a_0} \rho_V = 910.2 \text{ kg/m}^3.$$

(b) U drugom dijelu zadatka neka je ponovno visina sante iznad s jednim tuljanom na njoj $a_T = 0.3\text{m}$, a ispod b_T , što je nepoznato. Označimo li masu tuljana s m_T možemo zapisati sljedeće relacije (**po 1 bod za svaku jednadžbu**), prvu za slučaj s jednim, a drugu za slučaj s dva tuljana na santi

$$Ag(\rho_V b_T - \rho_L(a_T + b_T)) = m_T g,$$

$$Ag(\rho_V(a_T + b_T) - \rho_L(a_T + b_T)) = 2m_T g.$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dolazimo do izraza za b_T (**1 bod za korištenje bilo koje valjane metode rješavanja sustava jednadžbi, 1 bod za ispravno riješen sustav te 1 bod za ispravno izračunat b**)

$$b_T = \frac{\rho_V + \rho_L}{\rho_V - \rho_L} a_T = 5.057 \text{ m},$$

uvrstimo li taj rezultat u bilo koju od jednadžbi iz sustava, možemo konačno odrediti površinu (**1 bod za ispravno izračunat A**)

$$A = \frac{m_T}{\rho_V a_T} = 0.244 \text{ m}^2.$$

Zadatak 3. (ukupno bodova: 9)

Promotrite idealan plin koji prolazi redom kroz sljedeće procese (pri čemu su brojevima označene početna, odnosno konačna stanja svakog od procesa):

(1-2) izohorno hlađenje pri kojem se temperatura plina smanji za 30 %

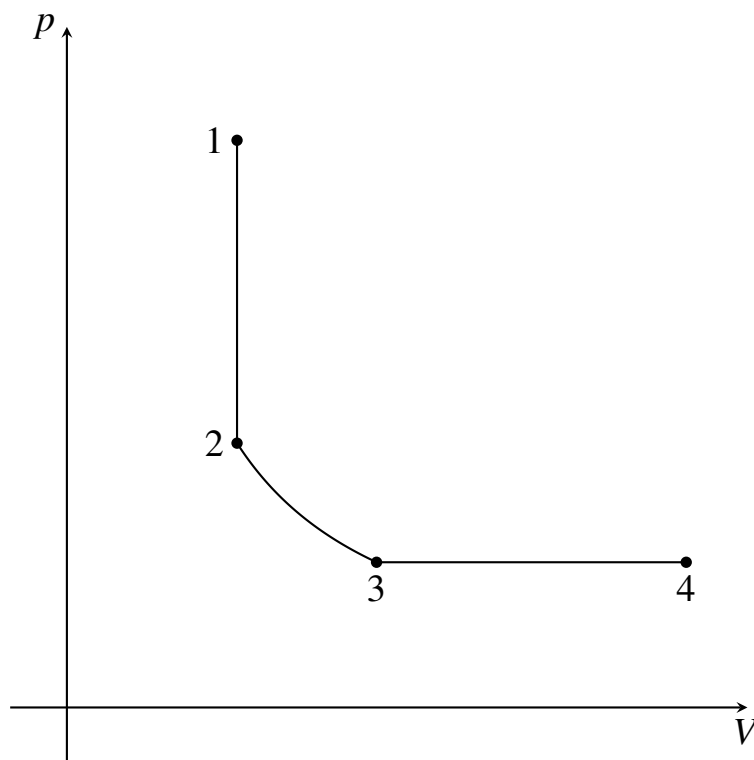
(2-3) izotermna ekspanzija

(3-4) izobarna promjena u kojoj se temperatura plina udvostruči te na kraju koje je tlak plina upola manji u usporedbi s tlakom s početka svih procesa (tlakom u stanju označenom s 1).

Odredite omjere početnih i konačnih temperatura te volumena plina (omjere za stanja označena s 1 i 4).

Skicirajte ovaj proces u p - V dijagramu i naznačite u njemu točke koje predstavljaju stanja 1-4.

Rješenje:



(Po 1 bod za svaki proces koji je ispravno ucrtan u graf. Obratiti pažnju na to da su 1-2 i 3-4 predstavljeni ravnim crtama, dok je izoterma 2-3 zakrivljena.)

Proces 1-2 je izohoran pa će omjer početne i konačne temperature biti jednak omjeru tlakova, odnosno vrijedi da je $P_2 = 0.7P_1$ (1 bod za ispravan omjer). Iz izobarnog procesa 3-4 možemo, uzevši u obzir informaciju o tlaku u stanju 4, zaključiti $P_3 = P_4 = 0.5P_1$ (1 bod za ispravno korištenje uvjeta zadatka i izobare).

Koristeći se prethodno dobivenim relacijama, jednačbom stanja idealnog plina te činjenicom da je 2-3 izotermni proces imamo (1 bod za fizikalno smislen postupak dobivanja omjera za stanje 3)

$$P_3V_3 = nRT_3 \Rightarrow 0.5P_1V_3 = nRT_2 \Rightarrow 0.5\frac{P_2}{0.7}V_3 = nRT_2 \Rightarrow V_3 = 1.4V_2.$$

Konačno, promjena 3-4 je izobarna te ako se pri njoj temperatura udvostruči, onda se i volumen udvostruči, to jest, $V_4 = 2V_3$ (**1 bod za ispravan omjer**). Sve skupa, kombiniranjem prethodnih relacija rezultat je (**po 1 bod za svaki ispravan omjer**)

$$\frac{V_4}{V_1} = 2.8 \quad \frac{T_4}{T_1} = 1.4.$$

Zadatak 4. (ukupno bodova: 7)

Velika kazaljka gradskog sata duljine 1 m napravljena je od ABS plastike, dok je pozadina na kojoj se nalaze brojevi staklena i oblika kruga radijusa 101 cm. Odredite na kojoj će temperaturi velika kazaljka točno dodirivati rub podloge. Koliki je tada omjer konačne i početne površine pozadine sata?

Koeficijent linearnog termalnog širenja stakla je $4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, dok je koeficijent linearnog termalnog širenja ABS plastike $60 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Pretpostavite da je početno mjerenje sata izvršeno na temperaturi od 20°C , da su prije navedeni koeficijenti konstante te da su svi elementi sata uvijek na istoj temperaturi.

Rješenje:

Koristeći se zakonom o termalnom širenju tijela imamo (**1 bod za poznavanje zakona te 1 bod za točne obje jednačbe**).

$$d_1 = d_0 (1 + \alpha_{\text{ABS}} \Delta T)$$

$$r_1 = r_0 (1 + \alpha_{\text{S}} \Delta T)$$

pri čemu su d duljina kazaljke, r radijus pozadine sata, α pripadni koeficijenti širenja i ΔT promjena temperature sata. Nulom u indeksu naznačeno je da je riječ o veličini u početnom stanju, a jedinicom u konačnom stanju. Po uvjetu zadatka mi tražimo temperaturu na kojoj je zadovoljeno $d_1 = r_1$, uvrštavanjem i raspisivanjem dobivamo (**1 bod za uvjet i 1 bod za rješavanje jednačbe**)

$$\Delta T = \frac{r_0/d_0 - 1}{\alpha_{\text{ABS}} - \alpha_{\text{S}} r_0/d_0} = 178.699^\circ\text{C}.$$

Konačna je temperatura tada jednaka $T_{\text{kon}} = 198.699^\circ\text{C}$ (**1 bod za ispravno određenu temperaturu**).

Širenje površine sata opisano je s (**1 bod za ispravnu jednačbu**)

$$A_1 = r_1^2 \pi \approx r_0^2 \pi (1 + 2\alpha_{\text{S}} \Delta T) = A_0 (1 + 2\alpha_{\text{S}} \Delta T).$$

Uvrstimo li prethodno izvedenu promjenu temperature, dobivamo traženi omjer (**1 bod za rezultat**)

$$\frac{A_1}{A_0} = 1.001.$$

Zadatak 5. (ukupno bodova: 12)

Na jedan kraj U-cijevi površine poprečnog presjeka 5 cm^2 ispunjene živom spojen je spremnik pun idealnog plina, dok je drugi kraj otvoren tvoreći tako aparaturu koju nazivamo plinskim termometrom.

Ako je početni volumen plina 5 L, tlak jednak jednoj atmosferi i temperatura 20°C odredite:

- (a) koliko se stupac žive podigne kada se plin zagrije za 20°C zanemarujući pri tome promjenu volumena plina zbog pomicanja žive
(b) koliki je rezultat u slučaju kada se ne zanemari promjena volumena.

Uzmite da je gustoća žive konstantna i da iznosi 13545.85 kg/m^3 . Zanemarite toplinsko širenje svih komponenti osim plina. Pretpostavite da je tlak okolnog zraka jedna atmosfera. Pretpostavite da u cijevi ima dovoljno žive da se njezina površina uvijek nalazi na okomito usmjerenom dijelu cijevi.

Rješenje:

(1 bod za ispravnu konverziju volumena i površine u m^3 i m^2 , dodijeliti bodove i u slučaju kada je to implicitno napravljeno. 1 bod za konverziju temperatura u Kelvine, dodijeliti bodove i u slučaju kada je to implicitno napravljeno.)

- (a) U početnom trenutku temperatura plina je:

$$T_0 = 293.15 \text{ K}.$$

Koristeći jednačbom stanja idealnog plina možemo dobiti

(1 bod za ispravno korištenje jednačbe stanja)

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad nR = p_{\text{atm}}V_0/T_0,$$

pri čemu su V_0 i T_0 početni volumen i temperatura, a p_{atm} atmosferski tlak. Zagrijavanjem se plin širi te ako se stupac žive na suprotnoj strani U-cijevi podigne za Δh u odnosu na početnu razinu, tada vrijedi **(2 boda za jednačbu stanja s ispravnim dodatnim članom za tlak)**

$$(p_{\text{atm}} + 2\rho_{\text{Hg}}\Delta h_{\text{V konst. g}}) V_0 = nR(T_0 + \Delta T),$$

pri čemu je ρ_{Hg} gustoća žive, g ubrzanje sile teže blizu površine Zemlje i ΔT povećanje temperature plina jednako 20 K . Sređivanjem izraza dobivamo **(1 bod za ispravno izračunatu visinu)**

$$\Delta h_{\text{V konst.}} = \frac{p_{\text{atm}}\Delta T}{2\rho_{\text{Hg}}gT_0} = 0.026 \text{ m}.$$

- (b) S druge strane, ako ne zanemarimo promjenu volumena, dobivamo sljedeću relaciju **(3 boda za jednačbu stanja s ispravnim dodatnim članovima za tlak i volumen)**

$$(p_{\text{atm}} + 2\rho_{\text{Hg}}\Delta h g)(V_0 + A\Delta h) = nR(T_0 + \Delta T),$$

pri čemu je A površina poprečnog presjeka cijevi. Raspisivanjem dolazimo do kvadratne jednačbe, čiji su korijeni **(1 bod za ispravne korijene jednačbe, bilo u varijabilnom obliku bilo s numeričkim koeficijentima)**

$$\Delta h_{1,2} = \frac{-2\rho_{\text{Hg}}gV_0 - p_{\text{atm}}A \pm \sqrt{(2\rho_{\text{Hg}}gV_0 + p_{\text{atm}}A)^2 + 8\rho_{\text{Hg}}gAp_{\text{atm}}V_0\Delta T/T_0}}{4\rho_{\text{Hg}}gA}.$$

Jedino je pozitivan predznak korijena diskriminante fizikalan (**1 bod za odabir predznaka**), pa njega biramo te uvrštavanjem svih vrijednosti dobivamo (**1 bod za ispravno izračunatu visinu**)

$$\Delta h = 0.025 \text{ m.}$$

Fizikalne konstante:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$p_{\text{atm}} = 101300 \text{ Pa}$$

$$T_0 = -273.15 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$R = 8.314 \text{ J/Kmol}$$