Rođendanska funkcija

Učenici četvrtih razreda ove su godine dobili projektni zadatak iz matematike na temu primjene derivacija u ispitivanju tijeka funkcije. Zadatak je bio da s pomoću brojaka/znamenaka iz datuma rođenja osmisle funkciju. Naravno, ne bio kakvu, već funkciju koja je polinom najmanje četvrtog stupnja ili racionalna funkcija.
Funkciji koju su osmislili trebali su ispitati tijek, pronaći nultočke, ekstreme, točke infleksije, intervale monotonosti, intervale konveksnosti i konkavnosti te nacrtati njen graf.
Za zapis matematičkog teksta koristili su matematičke editore (npr. jednadžba u wordu), a graf su nacrtali u nekom grafičkom programu (GeoGebra, Desmos...).

U nastavku je rad koji je napravila učenica **Andrea Čavlović**.

ROĐENDANSKA FUNKCIJA

04.01.2002. (4,1,20,2)

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 20x}{x^2 - 4}$$

$x^2 - 4 \neq 0$
$x^2 \neq 4$
$x \neq \pm 2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$

NULTOČKE

$f(x) = 0$

$$0 = \frac{-2x^3 + 20x}{x^2 - 4}$$

$-2x^3 + 20x = 0$

$2x(-x^2 + 10) = 0$

$x_1 = 0$

$-x^2 + 10 = 0$
$x^2 = 10$
$x_{2,3} = \pm\sqrt{10}$

A(0,0)

B($-\sqrt{10}, 0$)

C($\sqrt{10}, 0$)

EKSTREMI

$$f'(x) = \frac{(-2x^3 + 20x)' \, * (x^2 - 4) - (-2x^3 + 20x) * (x^2 - 4)'}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-6x^2 + 20) * (x^2 - 4) - (-2x^3 + 20x) * (2x)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^4 + 24x^2 + 20x^2 - 80 - (-4x^4 + 40x^2)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^4 + 24x^2 + 20x^2 - 80 + 4x^4 - 40x^2}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^4 + 4x^2 - 80}{(x^2 - 4)^2}$$

$$\frac{-2x^4 + 4x^2 - 80}{(x^2 - 4)^2} = 0$$

$$-2x^4 + 4x^2 - 80 = 0$$

$x_1 = 1.9 - 1.6i$
$x_2 = -1.9 + 1.6i$
$x_3 = 1.9 + 1.6i$
$x_4 = -1.9 - 1.6i$

$\Rightarrow$ Nema realnih rješenja, što znači da nema lokalnih ekstrema, tj. točaka minimuma i maksimuma

INTERVAL MONOTONOSTI

- s obzirom da nema ekstrema, odaberemo bilo koji x te ga uvrstimo u prvu derivaciju funkcije, npr. x=0 $\Rightarrow f(0) = -5$, te smo dobili negativan rezultat što znači da funkcija pada na cijeloj svojoj domeni

PREGIB

$$f''(x) = \frac{(-2x^4 + 4x^2 - 80)' * (x^2 - 4)^2 - (-2x^4 + 4x^2 - 80) * ((x^2 - 4)^2)'}{(x^2 - 4)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(-8x^3 + 8x) * (x^2 - 4)^2 - (-2x^4 + 4x^2 - 80) * 2(x^2 - 4) * 2x}{(x^2 - 4)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4)[(-8x^3 + 8x)(x^2 - 4) - 4x(-2x^4 + 4x^2 - 80)]}{(x^2 - 4)^4}$$

$$f''(x) = \frac{\cancel{(x^2 - 4)}[(-8x^3 + 8x)(x^2 - 4) - 4x(-2x^4 + 4x^2 - 80)]}{(x^2 - 4)^{\cancel{4}3}}$$

$$f''(x) = \frac{-8x^5 + 32x^3 + 8x^3 - 32x + 8x^5 - 16x^3 + 320x}{(x^2 - 4)^3}$$

$$f''(x) = \frac{\cancel{-8x^5} + 32x^3 + 8x^3 - 32x \cancel{+ 8x^5} - 16x^3 + 320x}{(x^2 - 4)^3}$$

$$f''(x) = \frac{24x^3 + 288x}{(x^2 - 4)^3}$$

$$\frac{24x^3 + 288x}{(x^2 - 4)^3} = 0$$

$$24x^3 + 288x = 0$$

$$x(24x^2 + 288) = 0$$

$x_1 = 0$

$$24x^2 + 288 = 0$$
$$24x^2 = -288$$
$$x^2 = -12$$

$x_{2,3} = \pm 2i\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ otpada jer nije realno rješenje

	-∞		-2		0		2		+∞
$f''(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		konkavna		konveksna		konkavna		konveksna	

točke pregiba : $x_1 = -2$

$x_2 = 0$

$x_3 = 2$

INTERVAL KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

- funkcija je konkavna na intervalima $\langle -\infty, \; -2\rangle \cup \langle 0, 2\rangle$

- funkcija je konveksna na intervalima $\langle -2 \, , 0 \, \rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$

ASIMPTOTE

vertikalne asimptote:

x=2 i x=–2

$$\lim_{x\to -2} \frac{-2x^3 + 20x}{x^2 - 4} = \frac{-2+0}{0-0} \Rightarrow ne\ postoji$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2x^3 + 20x}{x^2 - 4} = \frac{-2+0}{0-0} \Rightarrow ne\ postoji$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2x^3 + 20x}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3 + 20x}{x^3 - 4x} = \frac{-2+0}{1-0} = -2$$

$$l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^3 + 20x}{x^2 - 4} + 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3 + 20x + 2x^3 - 8x}{x^2 - 4}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{12x}{x^2 - 4} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

kosa asimptota :

y = – 2x